Lógica borrosa
Sistemas borrosos

Diego Milone

Inteligencia Computacional
Departamento de Informática

FICH-UNL

Organización

Introducción

Pensamiento borroso... difuso? probabilístico?

Introducción

Pensamiento borroso... difuso? probabilístico?

Reglas lingüísticas

Introducción

Pensamiento borroso... difuso? probabilístico?

Reglas lingüísticas

`if-then` borroso?

Introducción

Pensamiento borroso... difuso? probabilístico?

Reglas lingüísticas

`if-then` borroso?

`si` la temperatura es ALTA
`entonces` activar el acondicionador a nivel MEDIO

Introducción

Pensamiento borroso... difuso? probabilístico?

Reglas lingüísticas

`if-then` borroso?

Incerteza vs. aleatoriedad:

Introducción

Pensamiento borroso... difuso? probabilístico?

Reglas lingüísticas

`if-then` borroso?

Incerteza vs. aleatoriedad:

Uno vs. muchos objetos o eventos

Introducción

Pensamiento borroso... difuso? probabilístico?

Reglas lingüísticas

`if-then` borroso?

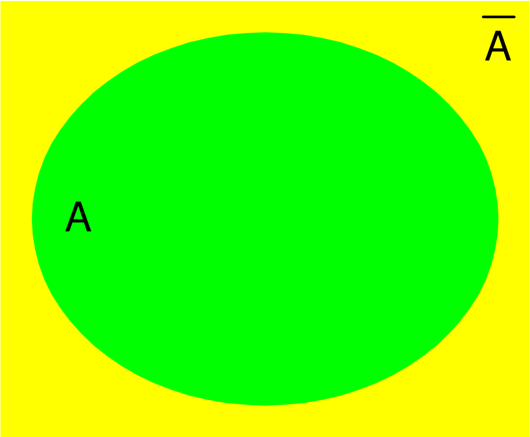
Incerteza vs. aleatoriedad:

Uno vs. muchos objetos o eventos

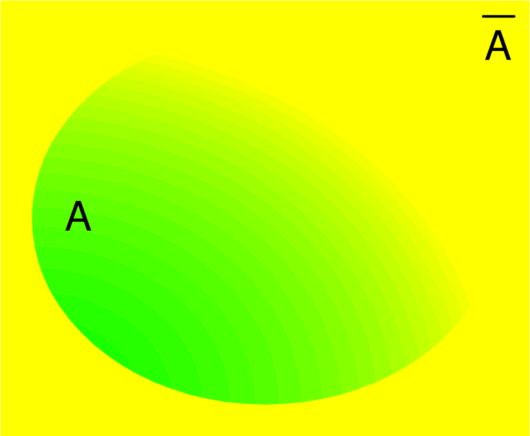
En un objeto que se acerca desde lejos tenemos incerteza o aleatoriedad?

En el número que saldrá al tirar los datos tenemos incerteza o aleatoriedad?

Conjuntos binarios



Conjuntos borrosos



Conjuntos borrosos

Ejemplos:

- Temperaturas: 2 diagramas binarios y borrosos
- Velocidades: 3 conjuntos discretos y sus pertenencias

Conjuntos borrosos

Ejemplos:

- Temperaturas: 2 diagramas binarios y borrosos
- Velocidades: 3 conjuntos discretos y sus pertenencias

Simplificación a conjuntos de 2 elementos ($\mathbb{R}^2$):

- Conjuntos binarios P y Q
- Conjutnos universo X y vacío Φ

Vértices de un cuadrado ($\mathbb{R}^2$)

Conjuntos borrosos

Ejemplos:

- Temperaturas: 2 diagramas binarios y borrosos
- Velocidades: 3 conjuntos discretos y sus pertenencias

Simplificación a conjuntos de 2 elementos ($\mathbb{R}^2$):

- Conjuntos binarios P y Q
- Conjutnos universo X y vacío Φ

Vértices de un cuadrado ($\mathbb{R}^2$)

Funciones de membresía o pertenencia:

- Conjuntos binarios: $\mu_A : x \to \{0, 1\}$
- Conjutnos borrosos: $\mu_{\tilde{A}} : x \to [0, 1]$

Organización

Subconjunto borroso

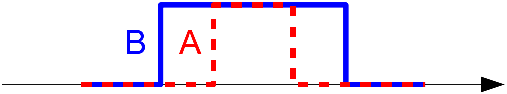
Sea E un conjunto enumerable y x un elemento de E. Un subconjunto borroso $\tilde{A}$ de E es un conjunto de pares ordenados:

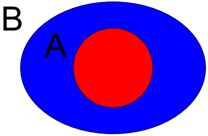
$$\tilde{A} = \{(x_i, \mu_A(x_i))\}; \quad x_i \in E$$

donde $\mu_A(x_i)$ es el grado de membresía de x en $\tilde{A}$.

Operaciones binarias

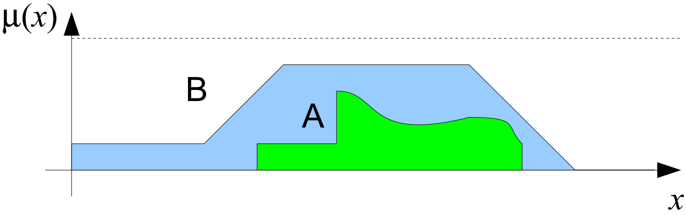
Conjunto binario incluido:





Operaciones borrosas elementales

Inclusión: $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x$



Operaciones borrosas elementales

Inclusión: $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x$

Igualdad: $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x$

Operaciones borrosas elementales

Inclusión: $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x$

Igualdad: $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x$

Complemento: $\tilde{B} = \tilde{A}^c \Leftrightarrow \mu_B(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x$

Operaciones borrosas elementales

Inclusión: $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x$

Igualdad: $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x$

Complemento: $\tilde{B} = \tilde{A}^c \Leftrightarrow \mu_B(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x$

Intersección: $\tilde{A} \cap \tilde{B} \Rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \text{mín}\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\} \quad \forall x$

Operaciones borrosas elementales

Inclusión: $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x$

Igualdad: $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x$

Complemento: $\tilde{B} = \tilde{A}^c \Leftrightarrow \mu_B(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x$

Intersección: $\tilde{A} \cap \tilde{B} \Rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x$

Unión: $\tilde{A} \cup \tilde{B} \Rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \text{máx}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x$

Operaciones borrosas elementales

Inclusión: $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x$

Igualdad: $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x$

Complemento: $\tilde{B} = \tilde{A}^c \Leftrightarrow \mu_B(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x$

Intersección: $\tilde{A} \cap \tilde{B} \Rightarrow \mu_{A\cap B}(x) = \text{mín}\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\} \quad \forall x$

Unión: $\tilde{A} \cup \tilde{B} \Rightarrow \mu_{A\cup B}(x) = \text{máx}\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\} \quad \forall x$

Suma disyuntiva: $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \left(\tilde{A} \cap \tilde{B}^c\right) \cup \left(\tilde{A}^c \cap \tilde{B}\right)$

Operaciones borrosas elementales

Inclusión: $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x$

Igualdad: $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x$

Complemento: $\tilde{B} = \tilde{A}^c \Leftrightarrow \mu_B(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x$

Intersección: $\tilde{A} \cap \tilde{B} \Rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \text{mín}\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\} \quad \forall x$

Unión: $\tilde{A} \cup \tilde{B} \Rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \text{máx}\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\} \quad \forall x$

Suma disyuntiva: $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \left(\tilde{A} \cap \tilde{B}^c\right) \cup \left(\tilde{A}^c \cap \tilde{B}\right)$

Diferencia: $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}^c$

Medidas de distancia entre conjuntos borrosos

Distancia de Hamming: $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$

Distancia de Hamming relativa: $\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = \dfrac{d(\tilde{A}, \tilde{B})}{n}$

Medidas de distancia entre conjuntos borrosos

Distancia de Hamming: $d(\tilde{A},\tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$

Distancia de Hamming relativa: $\delta(\tilde{A},\tilde{B}) = \dfrac{d(\tilde{A},\tilde{B})}{n}$

Distancia euclídea: $e(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2}$

Distancia euclídea relativa: $\epsilon(\tilde{A},\tilde{B}) = \dfrac{e(\tilde{A},\tilde{B})}{\sqrt{n}}$

Organización

Caracterización de conjuntos borrosos

Conjunto binario de nivel α: $A_\alpha = \{x / \mu_A(x) \geq \alpha \quad \forall x \in A\}$

Caracterización de conjuntos borrosos

Conjunto binario de nivel α: $A_\alpha = \{x/\mu_A(x) \geq \alpha \quad \forall x \in A\}$

Conjunto convexo:

1. $\mu_A\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \text{mín}\left\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right\}$
   $\forall\lambda \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   (interpretación, ejemplo...)

Caracterización de conjuntos borrosos

Conjunto binario de nivel α: $A_\alpha = \{x/\mu_A(x) \geq \alpha \quad \forall x \in A\}$

Conjunto convexo:

1. $\mu_A\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \min\left\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right\}$
   $\forall \lambda \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   (interpretación, ejemplo...)
2. $\tilde{A}$ es convexo $\Leftrightarrow A_\alpha$ es convexo $\forall \alpha \in [0,1]$

Caracterización de conjuntos borrosos

Conjunto binario de nivel α: $A_\alpha = \{x/\mu_A(x) \geq \alpha \quad \forall x \in A\}$

Conjunto convexo:

1. $\mu_A\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \min\left\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right\}$
   $\forall \lambda \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   (interpretación, ejemplo...)
2. $\tilde{A}$ es convexo $\Leftrightarrow A_\alpha$ es convexo $\forall \alpha \in [0,1]$

Conjunto normal: $\max\left\{\mu_A(x)\right\} = 1$

Caracterización de conjuntos borrosos

Conjunto binario de nivel α: $A_\alpha = \{x/\mu_A(x) \geq \alpha \quad \forall x \in A\}$

Conjunto convexo:

1. $\mu_A\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \text{mín}\left\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right\}$
   $\forall \lambda \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   (interpretación, ejemplo...)
2. $\tilde{A}$ es convexo $\Leftrightarrow A_\alpha$ es convexo $\forall \alpha \in [0,1]$

Conjunto normal: $\text{máx}\left\{\mu_A(x)\right\} = 1$

Tamaño de un conjunto borroso: $|\tilde{A}| = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)$
(relación con los conjuntos binarios, ejemplos...)

Otras propiedades curiosas

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}^c =^? X$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{A}^c =^? \Phi$$

Ejemplos...

El conjunto borroso medio

$$\tilde{M}/\mu_M(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in E$$

El conjunto borroso medio

$$\tilde{M}/\mu_M(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in E$$

$$\tilde{M} = \tilde{M} \cap \tilde{M}^c = \tilde{M} \cup \tilde{M}^c = \tilde{M}^c$$

El conjunto borroso medio

$$\tilde{M}/\mu_M(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in E$$

$$\tilde{M} = \tilde{M} \cap \tilde{M}^c = \tilde{M} \cup \tilde{M}^c = \tilde{M}^c$$

¿$\tilde{M}$ es el conjunto más borroso?

¿Cómo medimos la borrosidad?

Entropía borrosa

$$S(\tilde{A}) = \frac{d(\tilde{A}, I^n_{min})}{d(\tilde{A}, I^n_{max})}$$

Entropía borrosa

$$S(\tilde{A}) = \frac{d(\tilde{A}, I^n_{min})}{d(\tilde{A}, I^n_{max})}$$

$$I^n = \{0,1\}^n$$

$$I^n_{min} = I^n_{j*} \Leftrightarrow d(\tilde{A}, I^n_{j*}) < d(\tilde{A}, I^n_j) \quad \forall j \neq j*$$

$$I^n_{max} = I^n_{i*} \Leftrightarrow d(\tilde{A}, I^n_{i*}) > d(\tilde{A}, I^n_i) \quad \forall i \neq i*$$

Entropía borrosa

$$S(\tilde{A}) = \frac{d(\tilde{A}, I^n_{min})}{d(\tilde{A}, I^n_{max})}$$

$$I^n = \{0, 1\}^n$$

$$I^n_{min} = I^n_{j*} \Leftrightarrow d(\tilde{A}, I^n_{j*}) < d(\tilde{A}, I^n_j) \quad \forall j \neq j*$$

$$I^n_{max} = I^n_{i*} \Leftrightarrow d(\tilde{A}, I^n_{i*}) > d(\tilde{A}, I^n_i) \quad \forall i \neq i*$$

Ejemplos...

Teorema de la entropía borrosa

$$S(\tilde{A}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{A}^c|}{|\tilde{A} \cup \tilde{A}^c|}$$

Teorema de la entropía borrosa

$$S(\tilde{A}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{A}^c|}{|\tilde{A} \cup \tilde{A}^c|}$$

Demostración...

Teorema del subconjunto borroso

¿En qué medida es $\tilde{B}$ un subconjunto de $\tilde{A}$?

Teorema del subconjunto borroso

¿En qué medida es $\tilde{B}$ un subconjunto de $\tilde{A}$?

$$\varphi(\tilde{B}, \tilde{A}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{B}|}$$

Teorema del subconjunto borroso

¿En qué medida es $\tilde{B}$ un subconjunto de $\tilde{A}$?

$$\varphi(\tilde{B}, \tilde{A}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{B}|}$$

Ejemplos...

Teorema de la entropía y el subconjunto borroso

$$S(\tilde{A}) = \varphi(\tilde{A} \cup \tilde{A}^c, \tilde{A} \cap \tilde{A}^c)$$

Teorema de la entropía y el subconjunto borroso

$$S(\tilde{A}) = \varphi(\tilde{A} \cup \tilde{A}^c, \tilde{A} \cap \tilde{A}^c)$$

Demostración...